

Chaleur, travail et énergie interne des gaz parfaits.

Sommaire

1. Les gaz parfaits sont les gaz "simplifiés"
2. Energie interne U des gaz parfaits
3. Conséquences pour les quatre transformations élémentaires

Bibliographie :

Introduction à la thermodynamique, C. Lhuillier et J. Rous, Dunod, 1994.

Les machines transformatrices d'énergie, tome 1, par G. Lemasson, Delagrave, 1963

1. Les gaz parfaits sont les gaz "simplifiés"

L'état d'un gaz pur (contraire d'un mélange) est décrit par la donnée de trois variables indépendantes (P, V, T) ou (P, V, n), (V, T, H) etc.¹ que l'on nomme "variables d'état". Toutes les autres variables d'états en dépendent. Dans le cas du gaz dit "parfait" on a une relation qui lie 3 de ces variables indépendantes à une quatrième :

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

avec ²:

n ≙ quantité de matière en moles [mol]

R ≙ constante des gaz parfaits ≈ 8,31434 ± 0,00035 J.K⁻¹.mol⁻¹.

T = température absolue du gaz (en kelvins [K])

P la pression du gaz en pascals [Pa]

V le volume du gaz en mètres-cubes [m³]

Cette équation est indépendante de la nature du gaz : elle est vraie pour l'O₂, le CO₂, l'hélium etc.... Elle permet d'étudier grossièrement le comportement d'un gaz quelconque à partir du modèle du gaz parfait.

Dans la pratique on utilise souvent la masse d'un gaz au lieu de sa quantité de matière (moins parlante). Dans ce cas, l'équation du gaz (puisque'elle dépend alors de la nature du gaz étudié) s'écrit :

$$P \cdot V = m \cdot r \cdot T$$

avec :

m ≙ masse du gaz [kg]

r ≙ constante thermodynamique du gaz considéré [J.K⁻¹.kg⁻¹]

En réalité les relations précédentes ne sont qu'une approximation de la réalité, il s'agit d'une modélisation du gaz qui permet de simplifier son étude. Comme toute modélisation, cette équation des gaz parfaits n'est vraie que dans un domaine d'étude, elle est d'autant plus exacte que son état P(T) est éloigné de la courbe de vaporisation et de la courbe de condensation, tout en restant à T < T_{critique} (voir le cours n°6). Ce domaine d'étude est cependant suffisamment large pour englober beaucoup d'applications industrielles et la relation des gaz parfaits est donc largement utilisée.

Ainsi, **le gaz parfait (G.P.) est le modèle simplifié du gaz réel étudié**. Dans le cas du CO₂ on parle alors du "CO₂ parfait" qui vérifie l'équation P.V = n.R.T. On peut également affiner le modèle précédent pour élargir son champ d'application et parler du "CO₂ réel" qui suit approximativement l'équation :

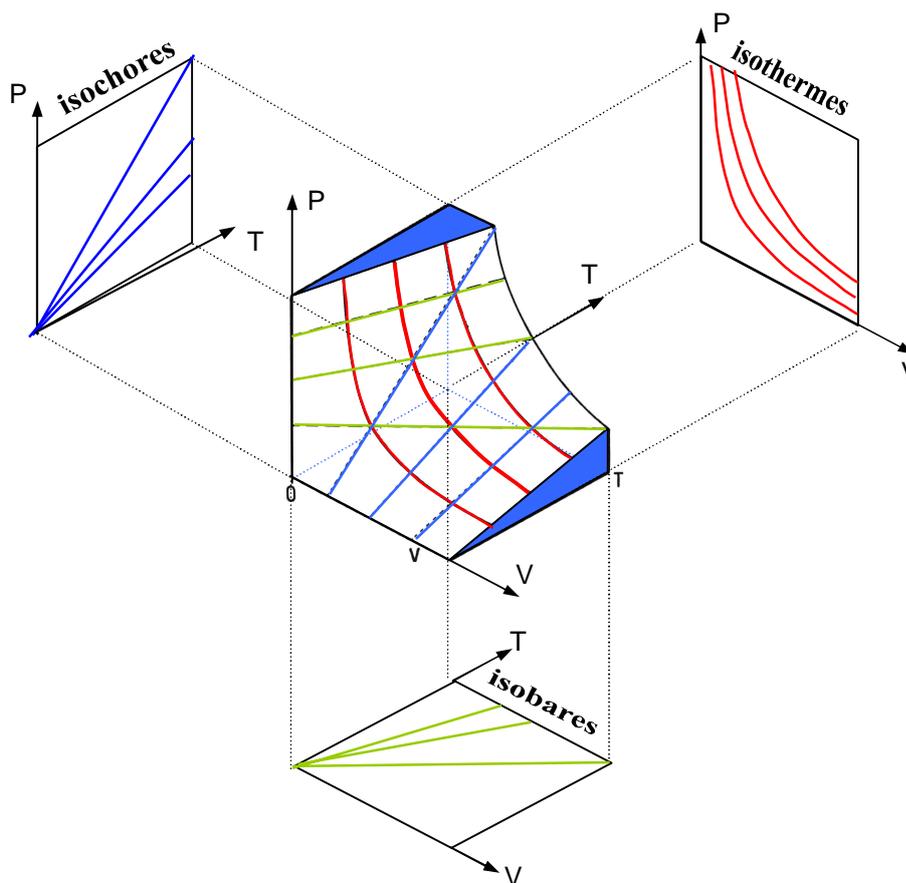
$$(P + 0,36/V^2) \times (V - 4,3 \cdot 10^{-5} \cdot n) = n \cdot R \cdot T.$$

On peut alors représenter la *surface caractéristique* d'un gaz parfait dans l'espace P-V-T afin de prévoir d'un coup d'œil l'évolution d'un GP (voir page suivante). On peut déjà affirmer qu'un gaz parfait ne subit jamais de changement de phase (étudié au cours n° 6) car il n'y a pas de "cassure" de la surface caractéristique.

¹ L'enthalpie H est une variable d'état que l'on a déjà rencontrée, de même que l'entropie S que l'on verra ultérieurement.

² Rappel : 1 mole de gaz contient ≈ 6,022 52 ± 0,000 09.10²³ molécules de gaz, il s'agit en fait du nombre d'atomes contenus dans 12 grammes de carbone 12 (incertitudes données par le cours de physique statistique de Berkeley, Armand Colin). Une mole de grains de sable de 0,1 mm (sable très fin) est contenue dans un volume de 10 km³, soit celui d'un cube de 2,15 km de côté (source : Wikipedia). Lorsqu'on travaille avec des volumes de gaz de l'ordre du litre, le nombre de molécules qui le compose est tellement élevé que cela justifie l'emploi de la physique statistique pour expliquer les mécanismes internes qui interviennent en thermodynamique.

Surface caractéristique d'un gaz parfait



2. Énergie interne U d'un gaz parfait (première loi de Joule)

On a vu qu'un corps sous forme gazeuse possédait deux capacités calorifiques massiques (ou chaleurs massiques) différentes, selon qu'on travaille à volume constant ou à pression constante : C_v et C_p . La quantité de chaleur $Q = M \cdot C_v \cdot \Delta T$ ou $M \cdot C_p \cdot \Delta T$ développée lors d'une transformation ne dépend donc pas seulement de l'état initial et de l'état final du gaz, mais également des conditions dans laquelle elle s'est déroulée : on disait bien que Q n'était pas une *variable d'état*, on ne dit pas Q_1 (chaleur "contenue" dans le gaz à l'état 1) ou Q_2 , mais Q_{12} (chaleur développée pour aller de l'état 1 à l'état 2 du gaz).

Cependant l'expérience montre que l'énergie interne U , contrairement à Q_{12} , ne dépend que de la température T pour un G.P (c'est la première loi de Joule) ainsi on

$$U = C^{te} \times T$$

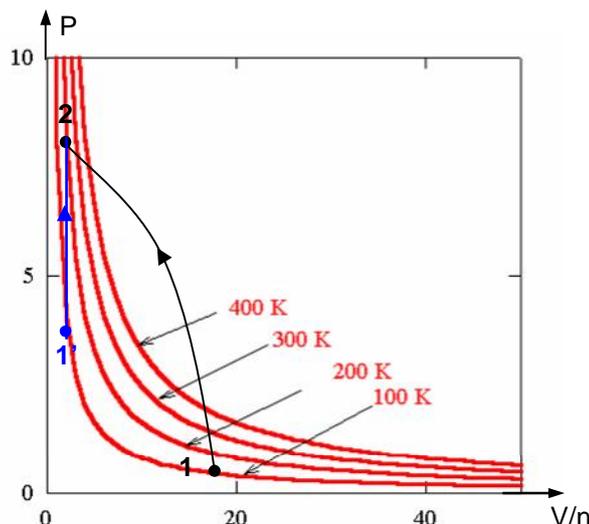
Cela confirme bien que U est une fonction d'état puisque T est une fonction d'état : on a le droit de parler de l'énergie interne U_1 du gaz dans l'état 1 ou de l'énergie interne U_2 du gaz dans l'état 2. En particulier on écrira ΔU pour désigner la *variation* d'énergie interne, au lieu de U_{12} (écriture réservée à la chaleur ou au travail, qui ne sont pas des variables d'état).

On aura bien évidemment :

$$\Delta U = C^{te} \times \Delta T$$

La variation d'énergie interne subie lors d'une transformation ne dépend que de la variation de température constatée. En particulier une transformation isotherme ($\Delta T = 0$) laissera inchangée l'énergie interne du gaz ($\Delta U = 0$).

Précisons maintenant la valeur de la constante qui lie ΔU et ΔT : prenons 2 transformations qui amènent le gaz de la température T_1 à la température T_2 . L'une de ces transformations (1-2) est quelconque, tandis que l'autre (1'-2) est isochore (cas particulier qui nous donne $W_{1'2} = 0$) :



ΔT identique pour les 2 transformations $\Rightarrow \Delta U_{12} = \Delta U_{1'2'} \triangleq \Delta U$

Pour la transformation 1'2' on a $\Delta U = W_{1'2'} + Q_{1'2'} = 0 + Q_{1'2'} = m \cdot c_v \cdot \Delta T$

d'où pour une transformation quelconque $\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T \Rightarrow m \cdot c_v$ est la constante de proportionnalité entre ΔU et ΔT avec :

$m \triangleq$ masse du gaz étudié [kg]

$c_v \triangleq$ capacité calorifique massique à volume constant du gaz étudié [$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$]

On peut alors montrer que l'énergie interne U d'un G.P. est donnée par la relation :

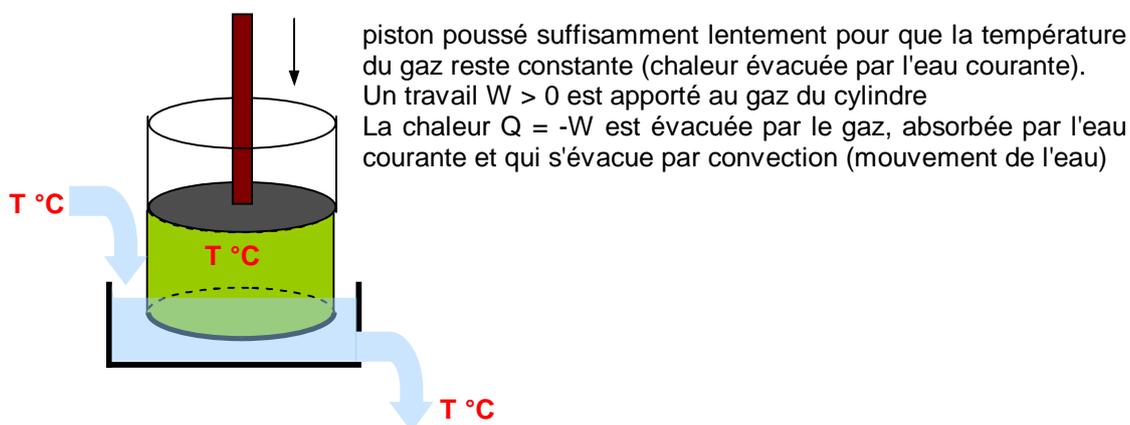
$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P monoatomique (un seul atome par molécule)}$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P. diatomique}$$

Comme $\Delta U = 0$ pour une transformation isotherme et comme $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$, il en découle que :

$$W_{12} = - Q_{12} \text{ pour une transformation isotherme}$$

Tout le travail échangé dans une transformation isotherme d'un gaz parfait est intégralement évacué en chaleur, et inversement (cela est faux pour les solides ou lors des changements de phase, c'est-à-dire quand on sort du domaine de validité du modèle des gaz parfaits).

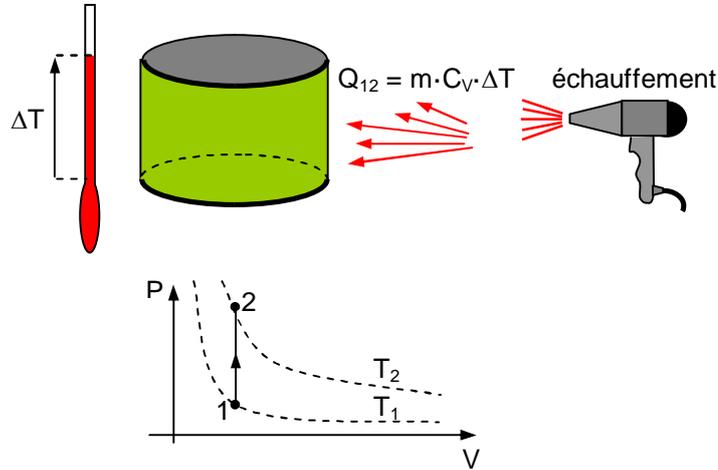


Exercice 1

3. Conséquences pour les quatre transformations élémentaires

3.1. Cas de la transformation isochore ($W_{12} = 0$)

Pour une transformation isochore on a $\Delta U = Q_{12} + 0$ d'après le premier principe de la thermodynamique et $\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ pour un G.P. Ainsi on a $Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T$...on le savait déjà (voir cours n°1) :



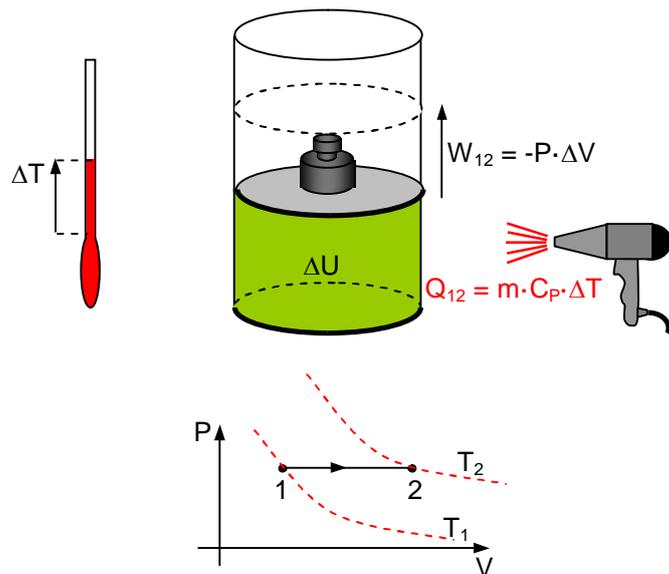
Ainsi, pour une transformation isochore :

$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ $W_{12} = 0$ $Q_{12} = m \cdot c_v \cdot \Delta T$
--

Remarque : bien que Q_{12} soit proportionnelle à ΔT , il ne faut pas croire que Q_{12} ne dépend pas du trajet suivi car ce dernier est ici rigoureusement défini : il s'agit d'une transformation isochore qui n'est pas un trajet quelconque !

3.2. Cas de la transformation isobare ($W_{12} = -P \cdot \Delta V$)

Pour une transformation isobare on a $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$ d'après le premier principe de la thermodynamique, d'où $m \cdot c_v \cdot \Delta T = m \cdot c_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V$



Ainsi, pour une transformation isobare :

$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ $W_{12} = -P \cdot \Delta V$ $Q_{12} = m \cdot c_p \cdot \Delta T$
--

Remarque : On peut noter les capacités calorifiques $C_p \triangleq m \cdot c_p$ et $C_v \triangleq m \cdot c_v$, d'où $\Delta U = C_p \cdot \Delta T - P \Delta V$ et $P = C^te$
 $\Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta PV \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta nRT$ or $n = C^te \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - nR \cdot \Delta T \Rightarrow$

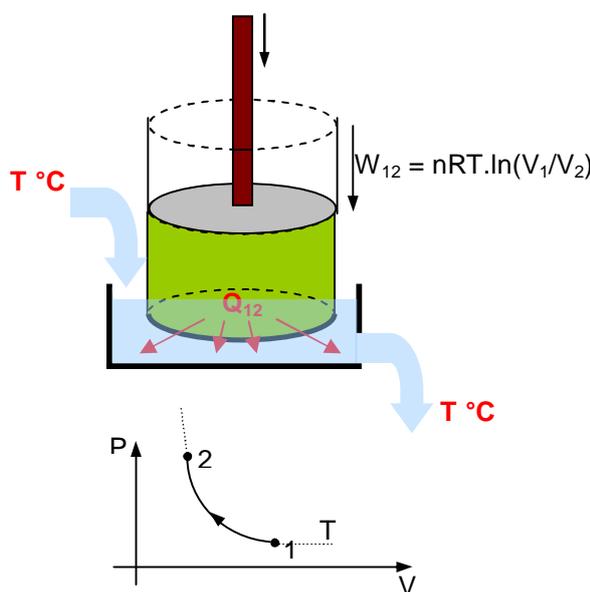
$$C_p - C_v = n \cdot R$$

Comme C_p et C_v sont des coefficients caractéristiques du gaz (et non de la transformation), cette relation, établie dans un cas particulier (transformation isobare), garde son caractère général pour toute transformation. On constate alors que l'on a forcément $C_p > C_v$ puisque $n \cdot R$ est toujours $> 0 \Rightarrow$ il faut plus de chaleur pour élever de ΔT la température d'un corps à pression constante qu'à volume constant (on s'en doutait puisque dans ce dernier cas on n'a pas de perte d'énergie par le biais du travail).

3.3 Cas de la transformation isotherme

On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$ ou $dU = \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = \delta Q - P \cdot dV \Leftrightarrow \int_T^T C_v \cdot dT = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR \cdot T}{V} \cdot dV \Leftrightarrow 0 = Q_{12} -$

$$n \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \Leftrightarrow Q_{12} = nRT \cdot \ln(V_2/V_1)$$

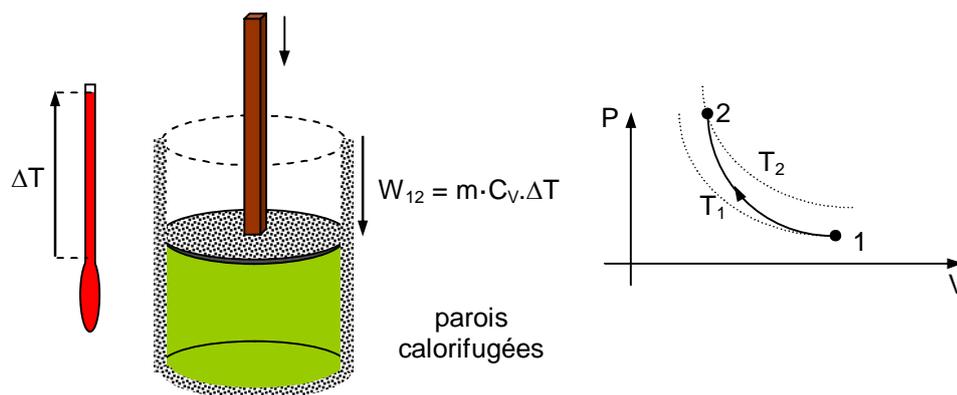


Ainsi, pour une transformation isotherme :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ W_{12} &= n \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_1/V_2) \\ Q_{12} &= n \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1) \end{aligned}$$

3.4. Cas de la transformation adiabatique ($Q_{12} = 0$)

Le premier principe de la thermodynamique donne $\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Leftrightarrow C_v \cdot \Delta T = 0 + W_{12}$



Ainsi pour une transformation adiabatique :

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ W_{12} &= m \cdot c_v \cdot \Delta T = \Delta U \\ Q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Comme $C_v < C_p$ on en déduit qu'il faut moins d'énergie pour élever la température lors d'une transformation adiabatique que lors d'une transformation isobare (on s'en doutait puisque l'adiabatique n'évacue pas la chaleur à l'extérieur). Inversement on peut alors dire qu'à quantités d'énergie évacuée égales, l'expansion isobare abaisse moins la température du gaz que l'expansion adiabatique.

D'autre part :

$dU = \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = -P \cdot dV \Rightarrow C_v \cdot dT = -nR \cdot T \cdot dV/V \Rightarrow C_v \cdot dT/T = (C_v - C_p) \cdot dV/V \Rightarrow C_v \times \ln(T_2/T_1) = (C_v - C_p) \times \ln(V_2/V_1) \Rightarrow \ln(T_2/T_1)^{C_v} = \ln(V_2/V_1)^{(C_v - C_p)} \Rightarrow T_2/T_1 = (V_2/V_1)^{1-\gamma} = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}$, c'est-à-dire $T \cdot V^{\gamma-1} = C^{te}$. Petit à petit on démontre finalement que (utilisé pour les exercices) :

$$\begin{aligned} T \cdot V^{\gamma-1} &= C^{te} \\ T \cdot P^{(1-\gamma)/\gamma} &= C^{te} \\ P \cdot V^\gamma &= C^{te} \end{aligned}$$

Remarque :

On démontre que le rapport des tangentes des courbes au point 1 vaut :

$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = C_p/C_v \triangleq \gamma$, or $C_p > C_v$ donc $\gamma > 1$: une adiabatique est plus "raide" qu'une isotherme. ($\gamma =$

1,4 pour un gaz parfait)

Exercices 2, 3, 4 et 5.

Exercices sur le travail, la chaleur et l'énergie interne des gaz parfaits

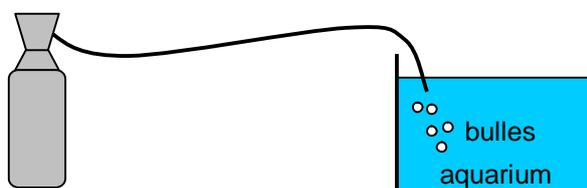
Notez bien que ces exercices sont une partie intégrale du cours et doivent être résolus au fur et à mesure de leur apparition dans le cours. Leur corrigé est téléchargeable sur le site :

<http://christophehaouy.wix.com/thermodynamique#!corrigs/c1yev>

Ils permettent de bien assimiler les concepts abordés dans chaque paragraphe et de se donner quelques ordres de grandeur. Les données numériques sont issues de différents ouvrages (en particulier le Cours de Physique statistique de Berkeley qui indique les incertitudes des valeurs numériques).

Exercice 1 : volume utile d'une bonbonne de gaz sous pression

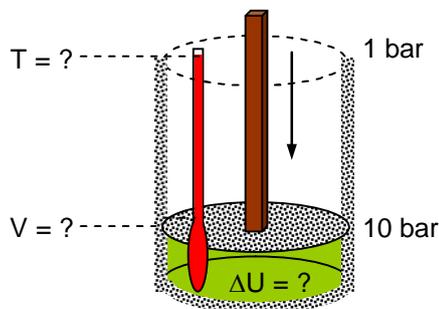
On dispose d'une bouteille de gaz carbonique (CO₂) de 0,5 L comprimée à 2 bars (≈ 2000 hPa) destinée à l'aquariophilie (alimentation des plantes aquatiques). La sortie de la bouteille est reliée à un tuyau qui plonge à environ 1 cm en dessous de la surface de l'eau d'un aquarium. Quelle quantité de CO₂ peut-on en extraire si on ouvre lentement la bouteille ?



Rép : 0,5 litre seulement...il vaut mieux acheter une bouteille de brasserie à 60 bars...

Exercice 2 : compression adiabatique.

On effectue une compression de 1 bar à 10 bars d' 1 litre d'air (G.P.) pris initialement à la température ambiante (20°C). Cette compression est suffisamment rapide pour que le récipient renfermant l'air n'ait pas le temps d'évacuer la chaleur pendant la compression. On donne $\gamma \approx 1,40$, $r \approx 287 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $c_v \approx 720 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'air.

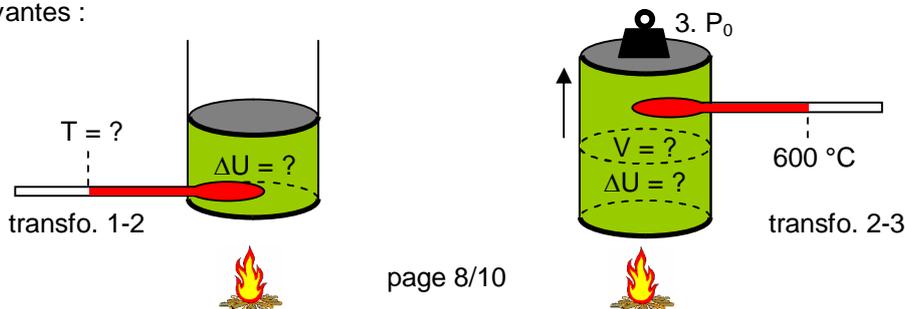


1. Calculer la température finale de la masse d'air.
2. Déduisez en son volume final et sa variation d'énergie interne.

Rép : 1 : 293 °C ; 2 : 0,2 L ; 236 J.

Exercice 3 : quelques calculs simples.

Un volume d'air (gaz parfait) de 20 litres à la pression atmosphérique $P_0 \approx 1013 \text{ hPa}$ et à $T_0 \approx 0^\circ \text{C}$ subit les deux transformations suivantes :



transformation 1-2 : compression isochore. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa pression soit égale à $3 \cdot P_0$.
transformation 2-3 : expansion isobare. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa température atteigne $600 \text{ }^\circ\text{C}$.

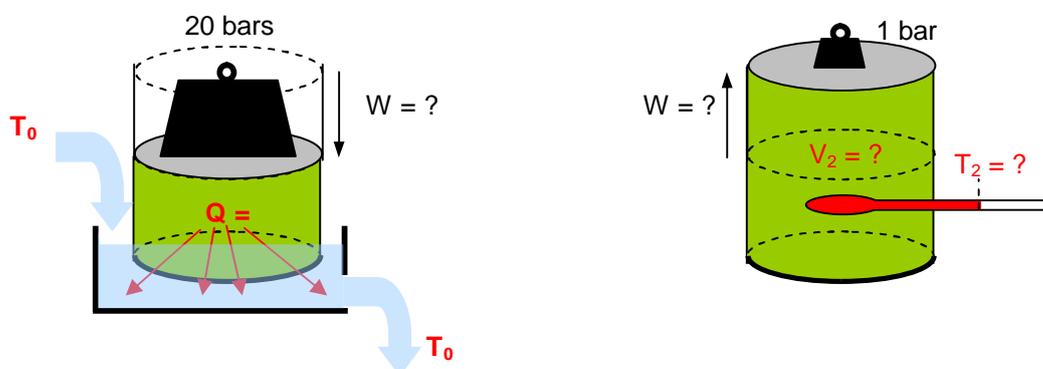
On donne pour l'air : masse molaire $M \approx 29 \text{ g/mole}$, $C_v \approx 708 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, $\gamma \approx 1,40$ et $R \approx 8,32 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. Quelle est la température atteinte par l'air à la fin de la transformation 1-2 ?
2. Calculez la masse m d'air et déduisez - en la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 1-2.
3. Quel est le volume occupé par l'air à la fin de la transformation 2-3 ?
4. Calculez la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 2-3.

Rép : 1 : 819 K ; 2 : 26 g ; 10,0 kJ 3 : 21,3 L ; 4 : 985 J.

Exercice 4 : Compression et travail.

On comprime isothermiquement jusqu'à la pression de 20 bars 1 m^3 d'air se trouvant initialement dans les conditions normales (rappel : $T_0 \approx 273 \text{ K}$, $P_0 \approx 1013,25 \text{ hPa}$). On admet que l'air se comporte comme un gaz parfait ($R \approx 8,32 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$)



1. Quel est le volume final de l'air ?
2. Calculez le travail de compression et la quantité de chaleur cédée par le gaz au milieu extérieur.

La masse d'air est ramenée à la pression $P_2 \approx 1 \text{ bar}$ par une détente adiabatique ($PV^\gamma = C^{\text{te}}$ avec $\gamma \approx 1,42$ pour l'air).

3. Déterminez le volume V_2 et la température T_2 du gaz après la détente.
4. Calculez le travail fourni au milieu extérieur et comparez - le au travail fourni au gaz pendant la compression isotherme. Interprétez les résultats en utilisant le diagramme de Clapeyron.

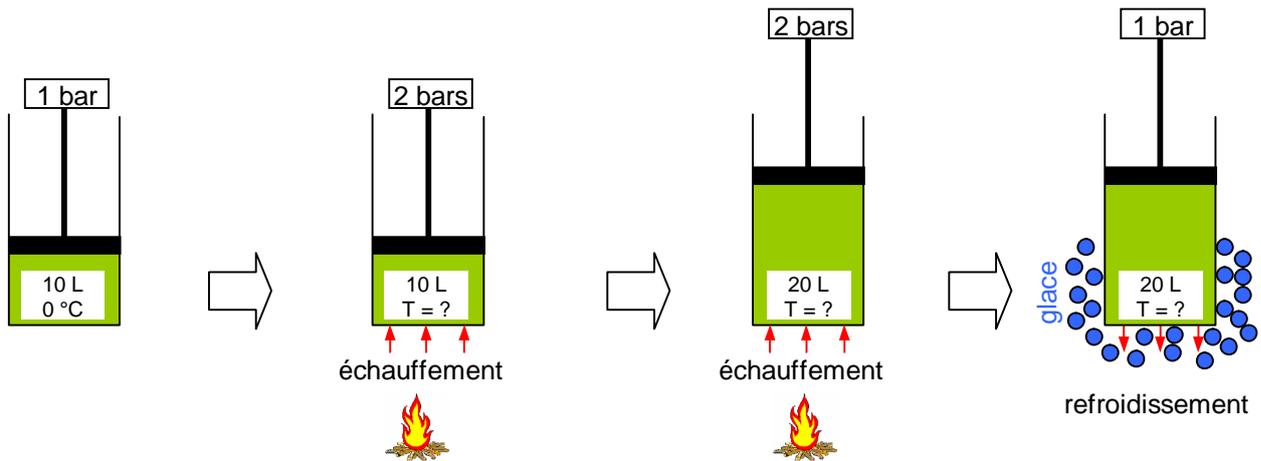
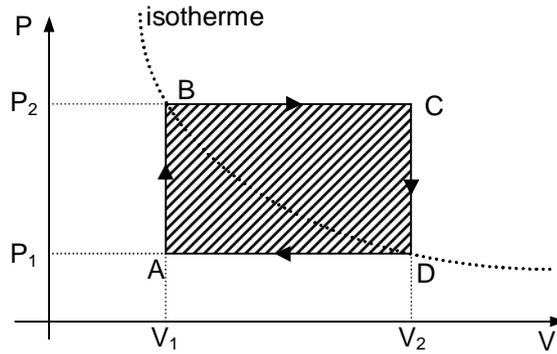
Rép : 1 : 50 L ; 2 : 304 kJ ; -304 kJ ; 3 : 412 L ; 113 K 4 : -142 kJ.

Exercice 5 : cycle, travail et chaleur.

Une certaine masse d'air est enfermée dans un corps de pompe dans les conditions initiales (point A en coordonnées de Clapeyron) $P_1 \approx 1 \text{ bar}$, $V_1 \approx 0,010 \text{ m}^3$, $T_1 \approx 273 \text{ K}$. On lui fait subir une série de transformations représentées par le rectangle ABCD ci - dessous. L'ordonnée de B est $P_2 = 2 \cdot P_1$, l'abscisse de D est $V_2 = 2 \cdot V_1$.

On donne :

- chaleur massique de l'air à pression constante : $C_p \approx 992 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- constante des gaz parfaits $R \approx 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- $C_p/C_v \triangleq \gamma \approx 1,42$;
- Masse molaire de l'air $M \approx 29 \text{ g/mole}$.



1. Calculez le travail échangé au cours du cycle ABCD.
2. Déterminez la température de l'air dans les états B, C et D.
3. Calculez la masse d'air m mise en jeu et déduisez - en les quantités de chaleur mises en jeu pendant les transformations AB, BC, CD et DA.

Rép : 1 : -1,00 kJ ; 2 : 546 K ; 1092 K ; 546 K ; 3 : 12,8 g ; 2,44 kJ ; 6,92 kJ ; -4,88 kJ ; -3,46 kJ